

HASM 应用中的精度损失问题和解决方案*

岳天祥^{1**} 杜正平¹ 宋敦江¹ 龚云²

1. 中国科学院地理学与资源研究所, 北京 100101; 2. 西安科技大学, 西安 710054

摘要 以往的数值模拟计算结果表明, HASM 精度较经典模型提高了多个数量级。然而, 在陕西咸阳市彬县大佛寺煤矿的应用案例表明, 虽然 HASM 构建的数字高程模型 (DEM) 精度比其他经典曲面建模方法都高, 但仍然存在较大的精度损失。其主要原因是大多数用于 DEM 建模的采样点和用于 DEM 精度分析的采样点不在像元的中心点, 但将它们用于 DEM 建模及其精度分析时, 都假设这些采样点位于所在像元的中心点。HASM 精度损失问题可归结为空间位置误差问题。为了解决这种空间位置误差问题, 文中引入了对模拟曲面在采样点进行 Taylor 展开的解决方案。数值模拟计算结果表明, Taylor 展开可解决 HASM 模拟中的位置误差问题。

关键词 曲面建模 数字高程模型 精度损失 空间位置误差

数字高程模型 (DEM) 是一种对地球表面进行数字化描述和模拟的方法, 是空间数据基础设施建设的重要组成部分^[1]。DEM 表面建模, 一般通过插值方法实现, 目前已经有大量的文献进行 DEM 插值方法的研究^[2-11]。为了解决地理信息系统的误差问题、多尺度问题、实时模拟问题和直接建模问题, 我们建立了高精度曲面建模方法 (HASM)^[5-9]。数值模拟计算结果表明, HASM 精度较经典模型提高了多个数量级^[9]。本文运用 HASM 构建陕西省咸阳市彬县大佛寺煤矿的数字高程模型, 分析 HASM 在实际应用中的精度损失问题, 提出解决方案。

1 HASM 数字高程模型试验研究

陕西咸阳市彬县大佛寺煤矿位于 $N35^{\circ}05'$ 和 $E108^{\circ}00'$, 属渭北旱塬梁沟壑区, 多山丘, 地形起伏大, 适合于进行数字高程模型的试验研究。该区面积约为 1.4 km^2 , 采用 GPS 控制网作为图根控制, 测区内布设 GPS 控制点 12 个, 精度等级采用 E 级。碎部点测量采用标称精度为测角 $2''$, 测距 $2+2 \times 10^{-6}$ 的徕卡 TC403 全站仪。以 GPS 控制点为基础,

运用极坐标法进行实测。

由于对未采样点的真值为未知, 为了估计误差, 本文采取交叉验证的方法。交叉验证需要用计算出来的结果与实际采样的结果 (假设为真值) 进行比较。本文从所有采样数据中, 取出 771 个采样数据用于 DEM 构建 (如图 1), 再用实际采样得到的 3085 个数据与模拟的数字高程模型进行比较验证 (如图 2)。对以上 771 个用于建模的采样数据, 分别使用 HASM, TIN, SPLINE 和 IDW 构建分辨率为 $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ 的陕西省咸阳市彬县大佛寺煤矿 DEM (图 3), 此 DEM 包括 140 万个像元。



图 1 用于建模的 771 个采样数据

2006-08-31 收稿, 2006-10-13 收修改稿

* 国家自然科学基金 (批准号: 40371094) 和国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2002CB412506) 资助项目

** E-mail: yue@lreis.ac.cn

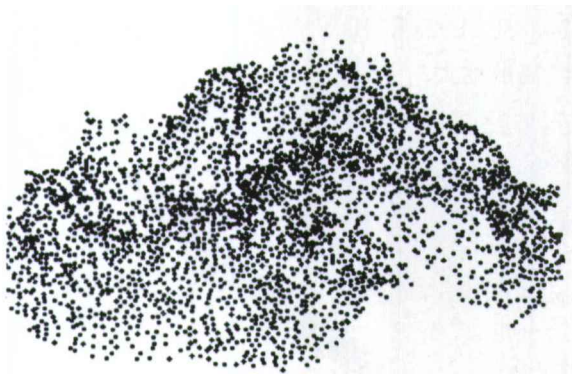


图 2 用于比较验证的 3085 个采样数据

本文采用的与 HASM 进行比较的方法是 ARCGIS9.0 中 3D Analyst 里的空间插值模块, 参数采用 ARCGIS9.0 默认的参数. IDW 搜索类型是半径可变的, 最大的点数为 12, 点的影响力系数为 2; SPLINE 方法使用的参数是规则样条 (regularized spline), 权重为 0.1, 搜索的点数为 12 个. 在 HASM 计算中, 由于需要研究区域矩形边界的数据, 本试验首先使用上面的样条函数方法插值得到矩形边界数据, 然后将边界数据与采样数据输入 HASM 方程中, 组成一个联合超定方程. 为了便于

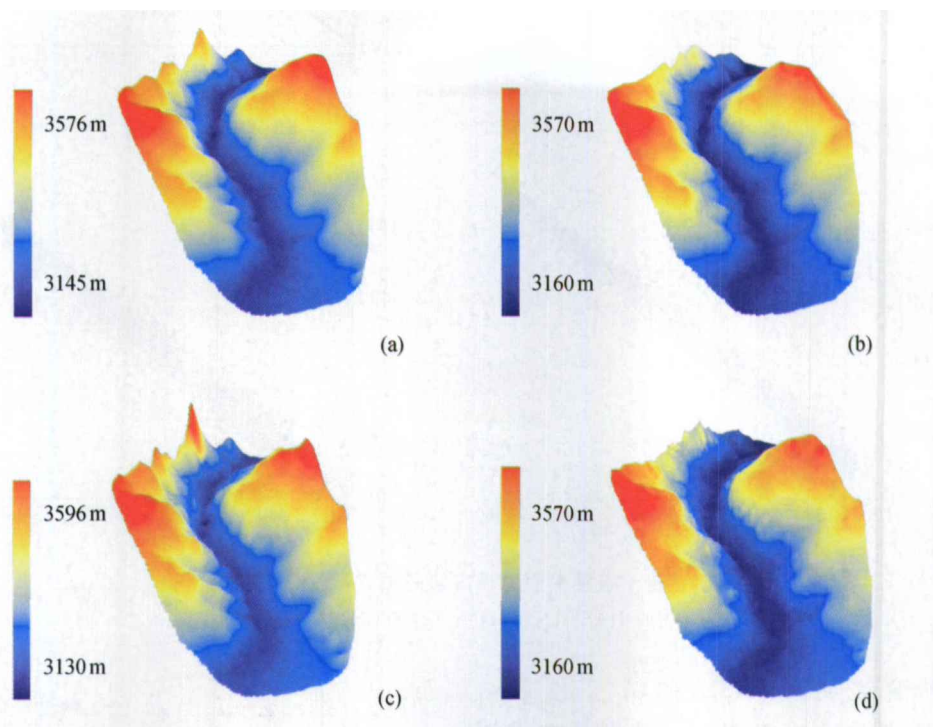


图 3 各种曲面建模方法生成的数字高程模型
(a) HASM; (b) TIN; (c) SPLINE; (d) IDW

验证和统计比较, 最后使用 ArcGIS 将离散格点的数据转换为栅格数据, 将验证数据也转换为栅格数据.

计算发现, TIN 模型和 IDW 模型较 HASM 模型的最高点低 6 m、较 HASM 模型的最低点高 15 m, SPLINE 模型的最高点较 HASM 模型的最高点高出 20 m, SPLINE 模型的最低点较 HASM 模型的最低点低 15 m. 从图 3 可以看出, TIN 和 IDW 都存在着峰值削平和洼地填平问题. SPLINE 存在着较大的边界振荡, 表 1 的统计分析结果表明, HASM 模型的精度最高.

表 1 基于各种曲面建模方法的数字高程模型误差比较分析

曲面建模方法	HASM	TIN	SPLINE	IDW
平均绝对误差/m	6.347	7.266	7.431	10.903
平均相对误差/%	0.3017	0.3526	0.3631	0.4543

以模拟值为纵轴 y , 以用于精度检验的 3085 个采样值的为横轴 x , 建立直角坐标系. 对每种曲面建模方法, 每个用于精度检验的采样点都可以找到一个相应位置的模拟值. 如果模拟值与采样值相等, 则坐标点落在直线 $y=x$ 上; 如果模拟值大于采样值, 则坐标点落在直线 $y=x$ 的上方; 如果模拟值

小于采样值, 则坐标点落在直线 $y=x$ 的下方. 点偏离直线 $y=x$ 越远, 则误差越大. 由图 4 可以看到,

TIN, SPLINE 和 IDW 的坐标点分布要比 HASM 方法离散度大.

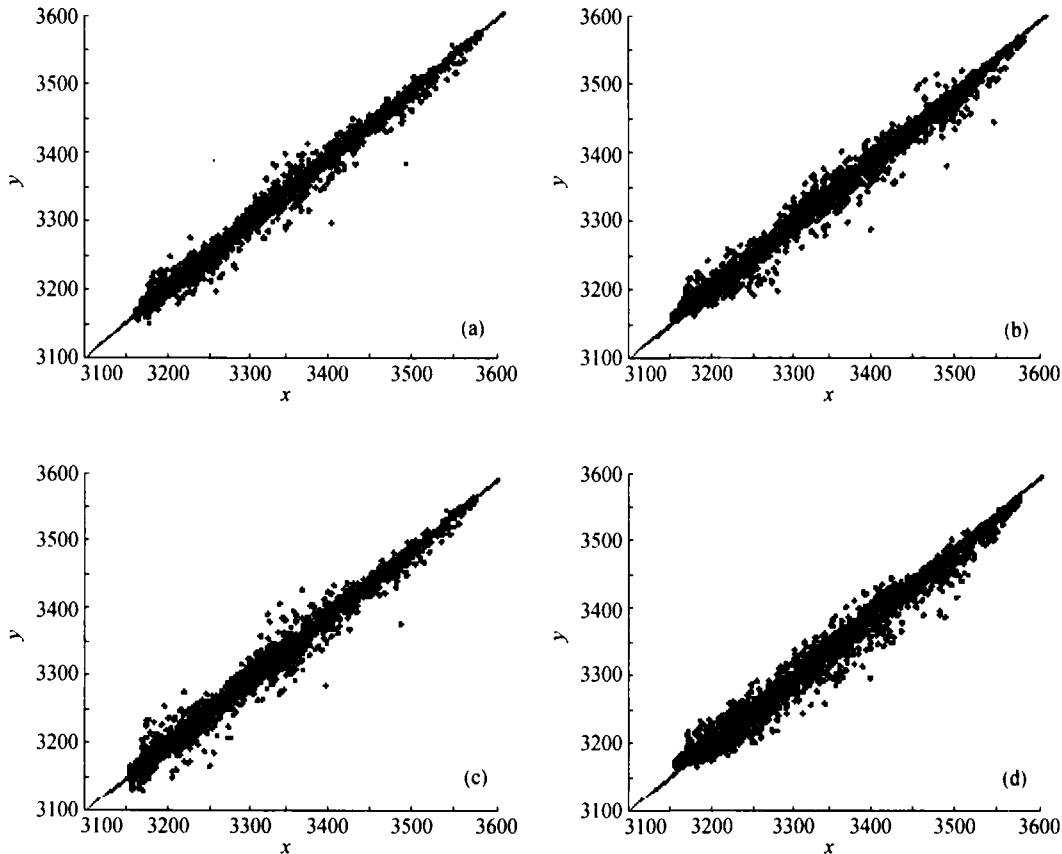


图 4 基于各种曲面建模方法的数字高程模型精度比较

(a) HASM; (b) TIN; (c) SPLINE; (d) IDW

之前的研究表明, HASM 的精度比 TIN, SPLINE 和 IDW 要高多个数量级, 特别是在模拟光滑曲面时, 优势更加突出^[9]. 然而在陕西咸阳市彬县大佛寺煤矿数字高程模型的案例分析中发现, 虽然 HASM 构建的数字模型精度比其他经典曲面建模方法都高, 但存在着较大的精度损失. 其主要原因是大多数用于数字高程模型建模的采样点和用于数字高程模型精度分析的采样点不在像元的中心点(图 5), 但将它们用于数字高程模型建模及其精度分析时, 都假设这些采样点都位于所在像元的中心点(计算网格顶点). 这种精度损失问题可通过模拟曲面在采样点的 Taylor 展开来解决.

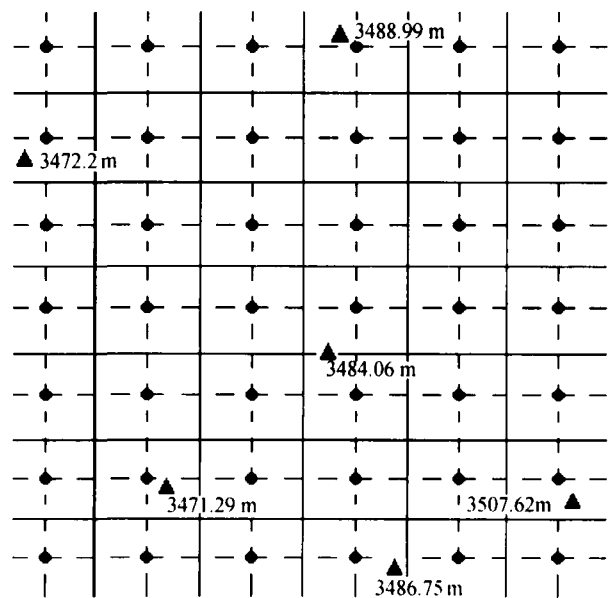


图 5 采样点与像元中心点的位置关系

2 精度损失的解决方案

如果采样点 A 不在计算网格的顶点(图 6), 设采样点 $A(A_x, A_y)$ 离格网点 (x_i, y_j) 最近, 点 (x_i, y_j) 到 A 的向量为 $\delta_x \times e_1 + \delta_y \times e_2$, 其中 $\delta_x = A_x - x_i$, $\delta_y = A_y - y_j$, 显然, $\delta_x \leq 0.5h_x$, $\delta_y \leq 0.5h_y$, 这里 h_x 和 h_y 分别为 x 和 y 方向的计算步长。

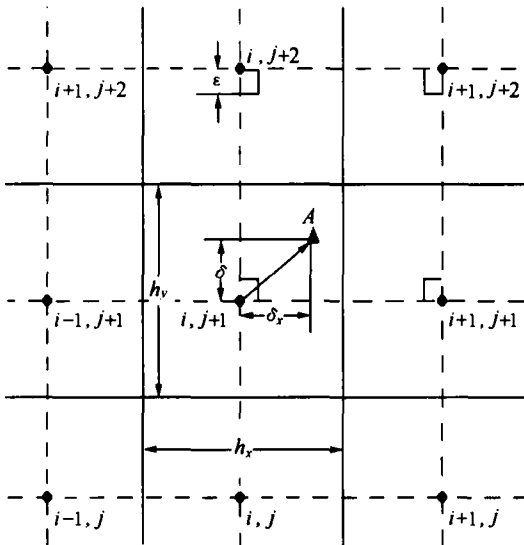


图 6 采样点在计算格网中的位置

将函数 $f(x, y)$ 在 A 点进行 Taylor 展开,

$$f(A_x, A_y) = f(x_i, y_j) + \left(\delta_x \frac{\partial}{\partial x} + \delta_y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_i, y_j) + \frac{1}{2!} \left(\delta_x \frac{\partial}{\partial x} + \delta_y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_i, y_j) + o((\delta_x^2 + \delta_y^2)^{\frac{3}{2}})$$

对上式中的 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$ 分别在 (x_i, y_j) 点进行中心差分逼近, 得

$$f(A_x, A_y) = \left(1 - \left(\frac{\delta_x}{h_x} \right)^2 - \left(\frac{\delta_y}{h_y} \right)^2 \right) f(x_i, y_j) + \left(\frac{\delta_x}{2h_x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_x}{h_x} \right)^2 \right) f(x_{i+1}, y_j) + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\delta_x}{h_x} \right)^2 - \frac{\delta_x}{2h_x} \right) f(x_{i-1}, y_j) +$$

$$\left(\frac{\delta_y}{2h_y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_y}{h_y} \right)^2 \right) f(x_i, y_{j+1}) + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\delta_y}{h_y} \right)^2 - \frac{\delta_y}{2h_y} \right) f(x_i, y_{j-1}) + \frac{1}{4} \frac{\delta_x}{h_x} \frac{\delta_y}{h_y} (f(x_{i+1}, y_{j+1}) - f(x_{i+1}, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_{j+1}) + f(x_{i-1}, y_{j-1})) + o\left(\frac{1}{3} \max(\delta_x h_x^2, \delta_y h_y^2) \right) \quad (1)$$

迭代过程中的采样差分方程可表达为

$$f(A_x, A_y) = \left(1 - \left(\frac{\delta_x}{h_x} \right)^2 - \left(\frac{\delta_y}{h_y} \right)^2 \right) f_{i,j}^n + \left(\frac{\delta_x}{2h_x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_x}{h_x} \right)^2 \right) f_{i+1,j}^n + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\delta_x}{h_x} \right)^2 - \frac{\delta_x}{2h_x} \right) f_{i-1,j}^n + \left(\frac{\delta_y}{2h_y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_y}{h_y} \right)^2 \right) f_{i,j+1}^n + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\delta_y}{h_y} \right)^2 - \frac{\delta_y}{2h_y} \right) f_{i,j-1}^n + \frac{1}{4} \frac{\delta_x}{h_x} \frac{\delta_y}{h_y} \cdot (f_{i+1,j+1}^n - f_{i+1,j-1}^n - f_{i-1,j+1}^n + f_{i-1,j-1}^n) \quad (2)$$

这样就得到了采样点 A 的采样向量, 计算每个采样点的采样向量, 形成采样矩阵, 采样方程与 Gauss 方程结合, 形成完整的 HASM 方法^[5-9]。

采样差分方程的截断误差为 $o\left(\frac{1}{3} \max(\delta_x \cdot (h_x)^2, \delta_y \cdot (h_y)^2) \right)$, 如果用局部线性化方法分析,

可知 Gauss 方程离散的截断误差近似为 $o\left(\frac{1}{3} \max(\delta_x \cdot (h_x)^2, \delta_y \cdot (h_y)^2) \right)^{[5-7]}$ 。由(1)式知, 如果把采样点 A

的值直接赋给离它最近的计算格网点, 则误差为 $o(\max(\delta_x, \delta_y))$, 在最坏的情形下, 误差为 $o\left(\max\left(\frac{1}{2} h_x, \frac{1}{2} h_y \right) \right)$ 。

但是, 当采样点离格网点非常近, $\max(\delta_x, \delta_y) \leq \epsilon$ (ϵ 为控制参数) 时, 从计算简便的角度, 可以考虑用离其最近的格网点来替代采样点。由于 $\delta_x \leq 0.5h_x$, $\delta_y \leq 0.5h_y$, 若采样点关于格网点的偏移量

δ_x 和 δ_y 分别在 $[0, \frac{1}{2}h_x]$ 与 $[0, \frac{1}{2}h_y]$ 中服从平均分布或者正态分布, 即平均偏移分别为 $\frac{1}{4}h_x$ 和 $\frac{1}{4}h_y$, 对应采样方程的截断误差为 $o(\frac{1}{12}\max((h_x)^3, (h_y)^3))$, 则若要维持整体误差不下降, ϵ 可以取 $\frac{1}{12}(\min(h_x, h_y))^3$. 如图 6, 如果采样点与离它最近格网点的坐标差不超过 ϵ , 则直接用离它最近的格网点替代计算, 这样可以减少计算量, 而又不至于给计算精度带来很大的影响.

当采样点在计算格网边界附近时, 这时采样向量的构建需要特殊处理. 如图 7, 采样点 A, B, C, D 位于计算格网的边, 如果在边界上进行差分离散, 则不能使用中心差分, 只能用偏心差分, 考虑到偏心差分的低精度会对整体计算精度带来影响, 因此, 凡是距离边界格网点最近的采样点, 不进行差分离散而是直接赋值给离它最近的格网点, 如图 7 中, 直接把 D 点的值赋给 (2, 1) 点; 如果某一个边界格网点附近有多个采样点, 则可以用简单的线性插值获得这一格网点的函数值, 如图中 (1, 1) 点的值可由 A, B 和 C 3 点的值线性插值获得.

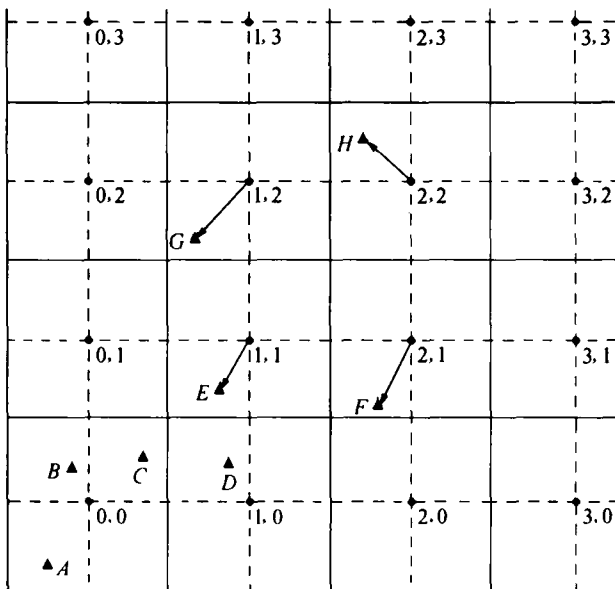


图 7 边界附近的采样点处理示意图

对于点 E, 离其最近的格网点为 (1, 1), 由 (2) 式有

$$f(E_x, E_y) = \left(1 - \left(\frac{\delta_x}{h_x}\right)^2 - \left(\frac{\delta_y}{h_y}\right)^2\right) f_{1,1}^n + \left(\frac{\delta_x}{2h_x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_x}{h_x}\right)^2\right) f_{2,1}^n + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_x}{h_x}\right)^2 - \frac{\delta_x}{2h_x}\right) f_{0,1}^n + \left(\frac{\delta_y}{2h_y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_y}{h_y}\right)^2\right) f_{1,2}^n + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_y}{h_y}\right)^2 - \frac{\delta_y}{2h_y}\right) f_{1,0}^n + \frac{1}{4} \frac{\delta_x}{h_x} \frac{\delta_y}{h_y} \cdot (f_{2,2}^n - f_{2,0}^n - f_{0,2}^n + f_{0,0}^n) \quad (3)$$

图 7 中距采样点 A, B, C, D, E, F, G, H 最近的 9 个格网点中, 只有 (2, 2), (2, 1), (1, 2), (1, 1) 4 个点位于计算区域内部, 其余 5 个点位于边界上, 其函数值由初始插值给定, 所以此时的采样方程为如下 4 个未知数的方程

$$\left(1 - \left(\frac{\delta_x}{h_x}\right)^2 - \left(\frac{\delta_y}{h_y}\right)^2\right) f_{1,1}^n + \left(\frac{\delta_x}{2h_x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_x}{h_x}\right)^2\right) f_{2,1}^n + \left(\frac{\delta_y}{2h_y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_y}{h_y}\right)^2\right) f_{1,2}^n + \frac{1}{4} \frac{\delta_x}{h_x} \frac{\delta_y}{h_y} f_{2,2}^n = f(E_x, E_y) - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_x}{h_x}\right)^2 - \frac{\delta_x}{2h_x}\right) f_{0,1}^n - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_y}{h_y}\right)^2 - \frac{\delta_y}{2h_y}\right) f_{1,0}^n - \frac{1}{4} \frac{\delta_x}{h_x} \frac{\delta_y}{h_y} (f_{0,0}^n - f_{2,0}^n - f_{0,2}^n)$$

类似的, 采样点 F 距离 (2, 1) 点最近, G 点距离 (1, 2) 点最近, 都只能建立 6 个未知数的方程. H 点则可以建立完整的 9 个未知数的代数方程.

3 数值模拟计算

衡量算法之间的优劣, 需要进行算法测试. 这里采取以无量纲数学函数进行模拟比较的方法, 比较各算法的平均绝对误差和平均相对误差^[11].

计算区域为 $(x, y) \in [0, 4.5] \times [0, 5]$, 用于算法检测的无量纲解析函数为

$$f(x, y) = \exp(-((x-1)^2 + (y-4)^2)) + \exp(-((x-3.5)^2 + 0.7 \times (y-2.3)^2)) +$$

$$\exp(-0.4 \times (x-2.1)^2 + (y-1.4)^2) + \exp(-((x-1.5)^2 + 0.6 \times (y-0.5)^2)) + \exp(-((x-4.0)^2 + (y-4)^2)) + 1$$

基准解析函数的格网图和等高线图如图 8.

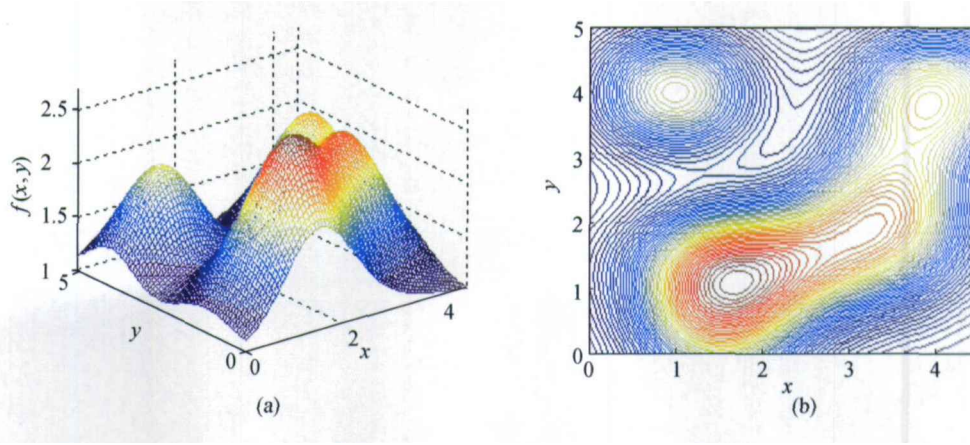


图 8 基准解析函数
(a) 格网图; (b) 等高线图

从模拟结果表明(表 2, 3), 无论是同一计算规模, 不同采样点数, 还是同样采样条件, 不同计算规模, HASM 方法都有明显的精度优势. 从表中可以看到, 有时候, 虽然采样点增加, 但计算误差却未必减少, 这是由于采样是随机采样, 出现这一情况, 是正常现象, 同样, 虽然分辨率提高, 但计算精度也未必会提高, 因为虽然采样点数虽然一样,

但每次的采样点的位置各不相同. HASM 方法, 由于有不同计算条件下迭代中止的时机不同, 所以也并不是采样点越多, 或者计算规模越小误差就越小的现象. 从模拟的等高线图可以看到(图 9), CUBIC 和 TIN 方法或者出现虚无的峰值, 或者出现山脊断裂, 整体曲面, 十分的不光滑. 而 HASM 方法的模拟图, 结果非常光滑准确.

表 2 相同计算规模、不同采样点数的误差比较

采样点数	平均相对误差			平均绝对误差		
	TIN/10 ⁻³	CUBIC/10 ⁻³	HASM/10 ⁻⁴	TIN/10 ⁻²	CUBIC/10 ⁻³	HASM/10 ⁻⁴
50	25.5000	15.5201	70.2391	4.2677	25.6047	119.5330
100	14.7806	8.8791	21.4238	2.6351	15.3502	35.1234
150	12.1946	7.1423	15.9979	2.1320	12.3333	25.9417
200	9.9585	5.9557	9.4993	1.7444	10.0769	15.4623
250	8.9734	5.2444	5.9248	1.6276	9.3328	9.8109
300	6.5783	3.6201	4.1558	1.1671	6.2635	6.6351
350	6.5850	3.8129	4.2398	1.1755	6.6570	6.6934
400	5.7309	2.8788	2.9637	1.0123	4.9280	4.6521
450	5.0223	2.7099	2.2879	0.8577	4.5387	3.5115
500	4.5849	2.2322	1.7659	0.8058	3.8283	2.7550

表 3 相同采样数、不同计算规模的误差比较

采样点数	平均相对误差			平均绝对误差		
	TIN/10 ⁻³	CUBIC/10 ⁻³	HASM/10 ⁻⁴	TIN/10 ⁻³	CUBIC/10 ⁻³	HASM/10 ⁻³
23×27	6.7974	3.3989	14.5714	1.1643	5.7476	2.3711
27×31	7.0248	3.8953	8.5533	1.2204	6.6323	1.4540
31×35	7.1660	4.2342	9.2741	1.2641	7.4643	1.5731
35×39	6.7410	3.6015	4.8297	1.1759	6.0452	0.8275
39×43	7.0639	3.9771	4.5472	1.2442	6.9730	0.7401

续表

采样点数	平均相对误差			平均绝对误差		
	TIN/ 10^{-3}	CUBIC/ 10^{-3}	HASM/ 10^{-4}	TIN/ 10^{-3}	CUBIC/ 10^{-3}	HASM/ 10^{-3}
43×47	7.0531	4.0592	4.6021	1.2284	6.9092	0.7616
47×51	7.1582	4.1645	4.8024	1.2789	7.3798	0.8077
51×55	8.3844	4.8578	6.2003	1.4883	8.4945	1.0371
55×59	7.4033	4.3140	4.4168	1.3041	7.4821	0.7158
59×63	7.5708	4.0440	4.5073	1.3167	7.0452	0.7052
63×67	7.5169	4.4413	4.7911	1.3118	7.5347	0.7611
67×71	6.8966	4.0274	4.5258	1.2251	7.0327	0.7257

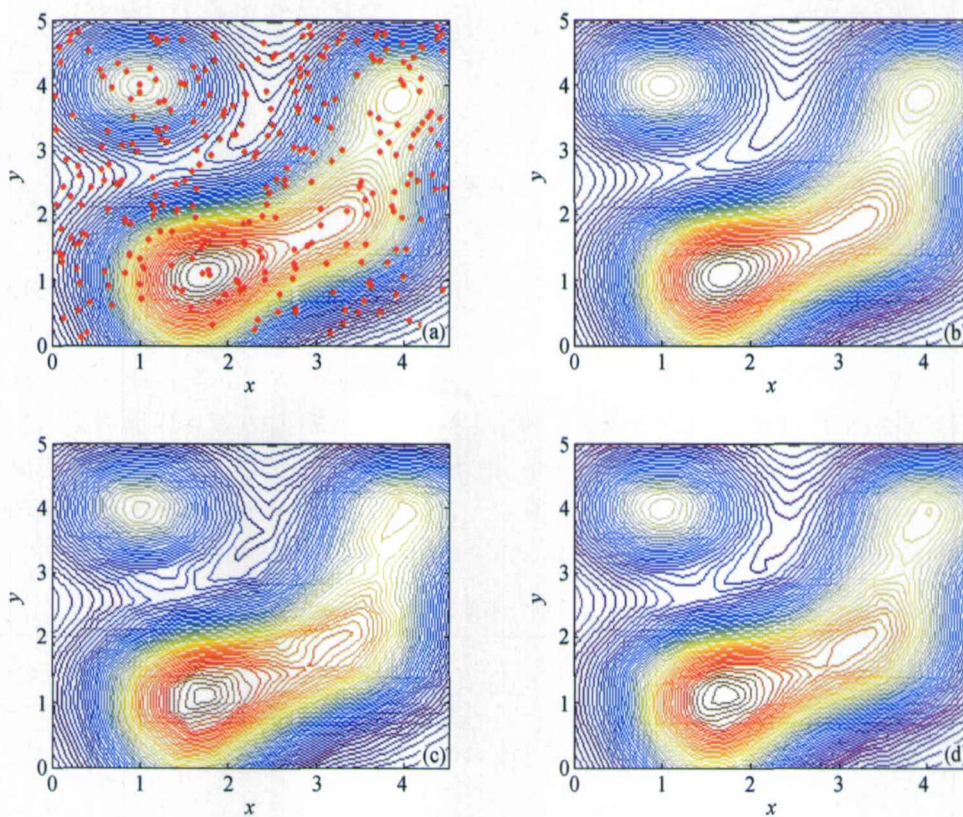


图9 采样分布和数值曲面图

(a) 基准面上的采样分布图; (b) HASM 数值曲面等高线图; (c) TIN 数值曲面等高线图; (d) CUBIC 数值曲面等高线图

4 讨论

陕西省咸阳市彬县大佛寺煤矿的 DEM 案例表明, HASM 在实际应用中仍然存在着精度损失, 其主要原因是大多数用于 DEM 建模的采样点和用于 DEM 精度分析的交叉检验点不在像元的中心点, 但将它们用于 DEM 建模及其精度分析时, 都假设这些点位于所在像元的中心点即 DEM 建模的计算网格点上。

HASM 精度损失问题是可归结为空间数据的位置误差问题。在给定的参考系下, 空间数据的位置误差可归结为数据中任意一点与其空间真实位置的差异程度。某一点或像元位置的定义基本有两种: (1) 以像元中心为参照进行量度, (2) 以像元的某一角点为参照进行量度。数据覆盖范围的两种相应定义为: (1) 以图像的角像元中心为参照进行度量; (2) 以图像角点最靠外边缘点为参照进行度量, 即图像左上角像元的左上边缘点、右上角像元的右上

边缘点、左下角像元的左下边缘点、右上角像元的右下边缘点。在 HASM 精度损失问题的讨论中, 空间数据中任一点以像元中心为参照进行度量, 数据覆盖范围以图像的角像元中心为参照进行度量。在采样点的 Taylor 展开数值模拟计算结果表明, Taylor 展开可解决 HASM 模拟中的位置误差问题。

由于 HASM 的模拟计算需要对每个模拟计算点建立一个方程, 所以计算量很大, 目前模拟计算 225 万个像元的区域需要耗时间 10 个小时。更大的区域的计算将耗费更大的时间, 而且计算时间的增长速度为 Z^3 。下一步的主要研究内容是探索缩短 HASM 计算时间的有效途径, 同时将 HASM 逐级简化, 提炼出耗时不同、精度不同的 HASM 算法, 分别满足不同的实际需要。

参 考 文 献

- 1 史文中. 空间数据与空间分析不确定性原理. 北京: 科学出版社, 2005
- 2 Ress WG. The accuracy of digital elevation models interpolation to higher resolutions. *Int J Remote Sensing*, 2000, 21(1): 7—

20

- 3 Almansa A, Gao F, Gousseau Y, et al. Interpolation of digital elevation models using AMLE and related methods. In: *Proceedings of IEEE, Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2002, 40(2): 314—325
- 4 Shenoy RG, Parks T W. An optimal recovery approach to interpolation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1992, 40(8): 1987—1996
- 5 岳天祥, 杜正平, 刘纪远. 高精度曲面建模与误差分析. *自然科学进展*, 2004, 14(2): 83—89
- 6 岳天祥, 杜正平. 高精度曲面建模: 新一代 GIS 与 CAD 的核心模块. *自然科学进展*, 2005, 15(3): 73—82
- 7 岳天祥, 杜正平, 宋敦江. 高精度曲面建模的改进: HASM4. *中国图像图形学报*, 2007, 12(2): 343—348
- 8 岳天祥, 杜正平. 高精度曲面建模最佳表达形式的数值实验分析. *地球信息科学*, 2006, 8(3): 83—87
- 9 岳天祥, 杜正平. 高精度曲面建模与经典模型的误差比较分析. *自然科学进展*, 2006, 16(8): 986—991
- 10 Kidner DB. Higher-order interpolation of regular grid digital elevation models. *Int J Remote Sensing*, 2003, 14(24): 2981—2987
- 11 Caruso C, Quarta F. Interpolation methods comparison. *Computers Math Applic*, 1998, 35(12): 109—126